Modellversuch: Einsatz graphikfähiger Taschenrechner (GTR) im Mathematikunterricht

- Bericht über einen Modellversuch des LISA in Sachsen-Anhalt -

(LISA – Landesinstitut für Lehrerfortbildung Lehrerweiterbildung und Unterrichtsforschung von Sachsen-Anhalt)

http://server1.schule.uni-halle.de/~lisa/mogtr.htm

I. Motivation:

Die Verfügbarkeit und zunehmende Verbreitung von leistungsfähigen GTR (auch unter Schülern) macht es notwendig, über Ziele und Inhalte mathematischer Allgemeinbildung sowie über die Art und Weise ihrer Vermittlung und Aneignung intensiver nachzudenken.

Wichtige Ziele des Mathematikunterrichts:
- die Befähigung der Schüler zum algorithmischen Arbeiten
- die Befähigung der Schüler zum numerischen Arbeiten
- die Entwicklung von Fähigkeiten im heuristischen Arbeiten

Der Lehrplan bedarf dadurch keiner prinzipiellen Änderung, es könnte jedoch sein, dass sich die Bedeutung einzelner Lernziele verändert, z.B. Rechenfertigkeiten, Fertigkeiten im Zeichnen von Graphen.
So müßte die Bedeutung der Entwicklung von Problemlösestrategien zunehmen, und gewisse Fertigkeiten wie das Berechnen von Termwerten, das Lösen bestimmter Gleichungstypen, das Aufstellen von Wertetabellen, das Zeichnen von Graphen, in den Hintergrund treten.

Weiter wird in immer mehr Sparten auf derartige Technik zurückgegriffen, da diese Erscheinung international zu beobachten ist, ergibt sich die Notwendigkeit über Konsequenzen in der Lebensvorbereitung der Heranwachsenden nachzudenken.
Mittlerweile kommen auch immer mehr graphikfähige und programmierbare Taschenrechner auf den Markt, die im Bezug auf ***Preis und Handhabbarkeit für einen Einsatz in der Schule geeignet wären.***

1985 wurde ein erster Schritt in diese Richtung, mit der Einführung des elektronischen Taschenrechners in Klasse 7, getan.
Man stellte fest, dass die Schüler in recht kurzer Zeit (etwa 4 Unterrichtsstunden) mit dem Taschenrechner so vertraut wurden, dass sie die Grundrechenoperationen sicher beherrschten. Dies bedeutete eine beträchtliche Zeitersparnis, gegenüber den Schülern die schriftlich bzw. mit Rechenstab rechneten.
Der Einsatz leistungsfähigerer Taschenrechner war bisher prinzipiell möglich, jedoch nicht zur schriftlichen Abiturprüfung zugelassen.

Ziele des Versuchs:
- Erfüllung der gegenwärtigen Lernziele des MU mit Hilfe des GTR
- Einbeziehung neuer Lernziele
- Erreichen eines tiefern Verständnisses grundlegender Begriffe (z.B. Funktion, Gleichung, Lösung einer Gleichung, Nullstelle)
- Verständnis für Näherungsverfahren entwickeln

- Entwicklung von Fähigkeiten im mathematischen Experimentieren
- Fähigkeit des Analysierens von Aufgaben (z.B. Schachverhalt durch Gleichung auszudrücken)
- Entwicklung von Fähigkeiten und Fertigkeiten beim Arbeiten mit mathematischen Modellen (z.B. Variable)
- Befähigung zum Kontrollieren von Ergebnissen
- Erwerb von Entscheidungskompetenz bei der Auswahl von Lösungsverfahren

Sorgen:
- totale Rechnerabhängigkeit
- Verkümmerung elementarer mathematischer Fertigkeiten
- Ungenügende Entwicklung einer selbstkritischen Arbeitshaltung
- Völliger Verlust mathematischer Grundfertigkeiten
- Blindem Drauflosprobieren anstelle eines gründlichen Durchdenkens des Sachverhaltes
- Verkümmerung von Kontrollfähigkeit und Kontrollwilligkeit

Um diesen Sorgen entgegenzuwirken, wurde ein Einsatz nur dann als sinnvoll erachtet, wenn man ihn in ein Gesamtkonzept des Mathematikunterrichts integriert. Hierfür wurden spezielle Schüler- und Lehrmaterialien entwickelt.

II. Welche Fragen hatte man:

- Wie verändern sich Schwerpunkte des Mathematikunterrichts der Klassenstufe 9 bis 12, welche Veränderungen werden notwendig.
- Welche veränderten Vorgehensweisen werden möglich, bzw. notwendig
- Welche Möglichkeiten bietet der GTR zur Realisierung globaler Ziele des Mathematikunterrichts (Beweisen, numerisches Arbeiten, heuristisches Arbeiten, Problemlösefähigkeit)
- Welche Beobachtungen haben sich bei der Handhabung des GTR gezeigt
- Wie haben sich die eingesetzten Schülermaterialien bewährt
- Welche Anforderungen und Probleme gab es hinsichtlich der Differenzierung, wie wurden diese bewältigt
- Welche Einstellung hatten die Schüler zum Einsatz des GTR
- Wie bewerten Schüler den Einsatz des GTR

III. Wie verlief der Versuch:

Der Versuch wurde an Gymnasien des Landes Sachsen-Anhalt durchgeführt, unter der Leitung des LISA, in Zusammenarbeit mit der Abteilung für Mathematikdidaktik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg und der Abteilung Mathematikdidaktik der Universität Otto von Guericke Magdeburg.

Der Versuch dauerte 5 Schuljahre und wurde in je zwei 9.Klassen in Gymnasien in Halle und Magdeburg durchgeführt.

Erweiterung:

92/93 wurde der Modellversuch in zweierlei Hinsicht erweitert:

- um festzustellen ob noch leistungsfähigere Taschenrechner andere Schlussfolgerungen ergeben, wurde ***in zwei 9. Klassen der TI-85 eingesetzt*** (Preis 228,50 DM), der gegenüber dem TI-81 Gleichungssysteme automatisch lösen kann, Terme mit Variablen mit Hilfe eines Solvers ohne umstellen berechnen kann, und erweiterte graphische und statistische Analysefunktionen besitzt.
- Der Modellversuch wurde ***auf das Kurssystem der Abiturstufe erweitert***

Ablauf:

Schuljahr **1991/92**	Schuljahr **1992/93**	Schuljahr **1993/94**	Schuljahr **1994/95**	Schuljahr **1995/96**
Hauptuntersuchung 4 x 9. Klasse	Hauptuntersuchung 4 x 10. Klasse	Hauptuntersuchung 2 x LK 11 2 x GK 11	Hauptuntersuchung 2 x LK 12 2 x GK 12	
	Voruntersuchung 2 x LK 11	Voruntersuchung 2 x LK 12		
	Einbeziehung TI-85 2 x Kl. 9	Untersuchung TI-85 2 x Kl. 10	Untersuchung TI-85 2 x Kl. 11	Untersuchung TI-85 2 x Kl. 12

Rechnerauswahl:

Im Vorfeld zu diesem Versuch wurden mehrere Rechner auf ihre Schultauglichkeit getestet:

- Casio-fx 8000G
- Sharp EL-2000
- TI-81

Aufgrund der einfachen Nutzung, des großen Displays, der Übersichtlichkeit, der Anwenderfreundlichkeit, und des zur Verfügung stehenden Zubehörs entschied man sich für den TI-81

Preis: 191,40 DM
http://www.software-spatz.de
(Preis gilt für das Nachfolgermodell TI-83)

Simulationssoftware: http://www.ti.com/calc./docs/81.htm

Vorbereitung des Unterrichtes:

Eine ***Arbeitsgruppe traf sich in 46 wöchigem Rhythmus,*** um didaktisch aufbereitetes ***Lehrer- und Schülermaterial zu erarbeiten.***

Um Vergleiche und Analysen erstellen zu können. Wurden zu jedem Stoffgebiet ***einheitliche Klausuren und Abschlussarbeiten*** geschrieben.

Es fanden ***regelmässige Beratungen*** mit den beteiligten Abteilungen statt, auch in Bezug auf die Erstellung der Abituraufgaben.

Unterrichtsmaterialien:

Klasse 9:
- Arbeiten mit Variablen, Termumformungen und Potenzen
- lineare Gleichungen, Gleichungssysteme und lineare Funktionen
- quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen
- Elemente der Stochastik

Klasse 10:
- Trigonometrie und Winkelfunktionen
- Funktionen und Gleichungen
- Körper und Körperberechnungen
- Elemente der Stochastik

Klasse 11/12:
- Grundkurs Analysis I,II
- Leistungskurs Analysis I,II
- Grundkurs Analytische Geometrie/Lineare Algebra
- Leistungskurs Analytische Geometrie/Lineare Algebra

Klausuren:

Zu jedem Stoffgebiet sind ***Kontrollaufgaben bzw. Klausuraufgaben erstellt worden, die verpflichtend*** in den Klassen des Modellversuches in die Klausuren aufgenommen wurden. Daneben blieb den Fachlehrern die Möglichkeit ***etwa ein Viertel eigene Aufgaben*** zu stellen. Besonders aussagekräftig waren die Abschlusstests, jeweils zum Abschluss der Klassen 9 und 10 die das Abschlussniveau der Schüler erfassen sollten.

Im Abitur durfte dann der GTR ebenfalls benutzt werden, da die Prüfung als Bestandteil des Modellversuchs anzusehen war. Hierzu wurden spezifische Abituraufgaben unter Berücksichtigung der erweiterten Leistungsmöglichkeiten des GTR von der Arbeitsgruppe erstellt, und durch das Kultusministerium bestätigt.

Internationale Zusammenarbeit:

Aufgrund internationaler Beziehungen zu den Universitäten in Budapest, Prag und Proznan begannen ***ab 92/93 in diesen Städten analoge Untersuchungen*** auf der Basis der erstellten Unterrichtsmaterialien.

Es fanden ***gemeinsame Tagungen*** statt, und es wurden ***Wettbewerbe der Schüler untereinander*** ausgetragen.

IV. Welche Ergebnisse bekam man:

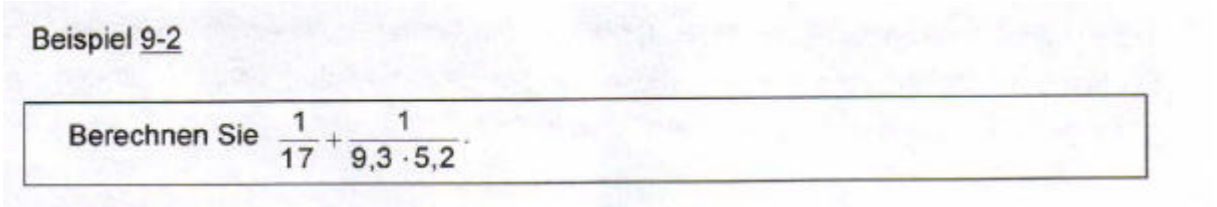
Auswertung erfolgte durch:
- Befragung der am Experiment beteiligten Lehrer und Schüler
- Lernzielkontrollen
- Unterrichtsbeobachtungen
- Vergleichsuntersuchungen zu ausgewählten Fragestellungen

Im Versuch wurde stets die Verwendung des GTR dem Erreichen des Bildungsziels untergeordnet.

Bedienfunktionen wurden an den Stellen im Unterricht vermittelt, an denen es von den jeweiligen Inhalten auch sinnvoll war.

Weiterer Bestandteil des Versuchs war es, dass Grundkenntnisse im Umgang mit dem GTR überwiegend durch eigenes Erforschen der Schüler angeeignet werden sollten.

Hierfür gab es eigens konzipierte Materialien:


Beispiel 9-2

Berechnen Sie $\frac{1}{17}+\frac{1}{9{,}3\cdot 5{,}2}$.

69% der Schüler hatten diesen Term richtig berechnet. Ein großer Teil der anderen Gruppe gab den Term wie folgt in den GTR ein: 1/17+1/9.3*5.2

Schon im Vorfeld schätzen die Schüler es als äußerst hilfreich ein, dass im Display des GTR der ***Term in seiner ganzen Struktur sichtbar*** ist.
Dennoch zeigte sich, dass selbst bei diesen einfachen Aufgaben, ***nur wenige Schüler ihre Ergebnisse kontrollierten*** (z.B. Überschlagsrechnung).

Im Verlauf des Versuchs zeigte sich, dass ein vielleicht erwartetes ***besseres Erfüllen*** der Leistungsanforderungen nicht in dem Maße zu beobachten war. Hingegen zeigte sich eher ein ***anderes Erfüllen*** von Leistungsanforderungen.

In diesem Rahmen zeigten sich folgende Schwerpunkte:
- GTR als Rechenhilfsmittel
- GTR als numerisches Werkzeug
- GTR als Wertespeicher
- GTR als Graphikwerkzeug

Rechenhilfsmittel:
Komfortables Rechenhilfsmittel vor allem bei Termwertberechnungen

Numerisches Werkzeug:
Lösen numerischer Probleme mit Hilfe von Algorithmen, verstehen von Näherungsverfahren, bewusst werden was eine Näherung bedeutet.

Wertespeicher:
Zum speichern von Variablen, Gleichungen und damit gekoppelten Graphiken, sowie Statistikdaten und Programmen.

Graphikwerkzeug:
Hilfreiches Werkzeug zur Visualisierung von Funktionen, und damit verbunden Bildung eines ausgeprägteren Funktionenverständnisses.

Vorteile:
- Nutzung des GTR zum ***entdeckenden Lernen***
- Nutzung als ***Kontrolleur*** bei Aufgabentypen zu denen mehrer Lösungsverfahren existieren
- Als ***Motivator*** für die notwendige Einbeziehung rechnerunabhängiger Wissenselemente
- Einschränkung auf direkt lösbare Fragestellungen wird aufgehoben und durch ***numerische Möglichkeiten*** erweitert
- Intensiveres nachdenken über ***Aufgabenstrukturen***. Offene Aufgabenstellungen wie: „Analysiere ...“ oder „Bewerte ...“ unterstützen dieses Anliegen

V. Spezielle Erfahrungen zu einzelnen Stoffgebieten:

GTR als Rechenhilfsmittel:

Ein weiteres Ziel des Versuches sollte sein den Schülern ein ***Gefühl für den sinnvollen Einsatz des GTR*** zu geben. Insbesondere ging es darum, dass die Schüler einen ***Sachverhalt zunächst gründlich durchdenken und nicht blind „drauflosprobieren“***.

Im Unterricht zeigte sich allerdings, dass einige der Gefahr unterlagen

Beispiel 9-6

Berechnen Sie. Runden Sie die Ergebnisse ggf. auf Hundertstel.

a) $\frac{5{,}7^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{5{,}7}}$ b) $2{,}5 \cdot 10^{11} : (2{,}5 \cdot 10^{-5})$ c) $\frac{7{,}8}{\sqrt{529} - 23}$

Bei allen Beispielen könnte man unter Kenntnis der Quadratwurzel aus 529 relativ schnell das genaue Ergebnis aufschreiben.

a) richtig 86,9% falsch 13,1%
b) richtig 57,1% falsch 42,9%
c) richtig 52,4% falsch 47,6%

Probleme:

- der Term wurde ohne GTR berechnet, aber ***Potenzgesetze wurden falsch angewendet***
- der Term wurde ***falsch eingegeben***, fehlende Klammerung, falsche Potenz
- der Term wurde mit dem GTR berechnet, ***Fehleranzeige konnte nicht interpretiert werden*** (Division durch Null)

Durch Kopfrechnen könnte man Fehler umgehen, die die Spezifik des Rechners mit sich bringt.

GTR als numerisches Werkzeug:

Es wurde angestrebt den Schülern die wesentlichen Eigenschaften des Begriffs „Algorithmus“ näher zu bringen. Sie als mathematische Modelle erfahren mit deren Hilfe außermathematische Probleme bearbeitet und gelöst werden können.
Hier wurde mehr Gewicht auf die Erarbeitung des Modells gelegt und nicht so sehr auf dessen rechnerspezifische Realisierung.

Beispiel 9-7

Ein Kapital von 15 000 DM wird bei einer Bank zu einem festen Zinssatz von 5,75 % für 5 Jahre festgelegt. Die Zinsen verbleiben auf dem Konto. Auf wieviel DM ist das Kapital nach Ablauf der 5 Jahre angewachsen?

Schritt für Schritt: 78%
Gleichung: 6%

Eine ähnliche Aufgabe wurde in einer Kontrollarbeit am Ende der 10 Klasse gestellt:
Schritt für Schritt: 11%
Gleichung: 88%

Lineare Gleichungssysteme, quadratische Gleichungen:
Neben graphischen und Näherungsverfahren wurden auch algorithmische Methoden genutzt um Gleichungssysteme zu lösen
Dies stellte höhere Anforderungen an die Schüler, da für die Erarbeitung des jeweiligen Algorithmus von einer allgemeinen Lösung ausgegangen werden muss.

(I) $a \cdot x + b \cdot y = c$ Lösung: $x = \frac{c \cdot e - b \cdot f}{a \cdot e - b \cdot d}$

(II) $d \cdot x + e \cdot y = f$ $y = \frac{a \cdot f - c \cdot d}{a \cdot e - b \cdot d}$

$x^2 + px + q = 0$ Lösung: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Es wurde auf Probleme der Lösbarkeit und auf Falluntersuchungen hingewiesen

Beispiel 9-8

Unter welcher Voraussetzung liefert der angegebene Algorithmus eine Lösung des Gleichungssystems?

▷ Eingabe a, b, c
▷ Eingabe d, e, f
a * e - b * d → N
c * e - b * f → K
a * f - c * d → L
$\frac{K}{N}$ → x
$\frac{L}{N}$ → y
Ausgabe x, y ▷

Für derartige Probleme stand ein Programm zur Verfügung allerdings fiel es den Schülern schwer einzuschätzen, ob es sinnvoll ist für gewisse Aufgaben das Programm zu nutzen. Gelegentlich waren deshalb Tendenzen zum „automatischen Nutzen“ zu beobachten.

Es war festzustellen, dass leistungsschwächere Schüler durch die erzielten Erfolge motivierter waren.

Schwieriger gestaltete sich die Aufgabe, wenn die Schüler die Gleichungssysteme zuerst in die Form bringen mussten, um das Programm darauf anwenden zu können.

Beispiel 9-9

Lösen Sie die folgenden Gleichungen.

a) $x^2 - 2x - 3 = 0$ b) $\frac{x}{x+3} + \frac{x}{x-3} = \frac{9}{4}$

a) richtig:83,1% falsch: 10,8%
b) richtig: 42,2% falsch: 48,2%

Die Probleme in b) sind nicht primär auf die Nutzung des GTR sondern wohl eher auf ungenügende Routine im Umgang mit Bruchtermen zurückzuführen.

Körperberechnung:
Hier ging es um das Erkennen funktionaler Zusammenhänge zwischen verschiedenen Größen.

Beispiel 9-10

Der Druckbehälter für eine chemische Reaktion besteht aus einem Zylinder, der beiderseits durch angesetzte Halbkugeln abgeschlossen wird. Der zylindrische Teil des Behälters soll ein Volumen von 4,5 m^3 besitzen. Um Wärmeverluste während der Reaktion gering zu halten, muß der Oberflächeninhalt des Druckbehälters möglichst klein sein.

a) Ermitteln Sie eine Formel zur Berechnung des Oberflächeninhalts des Druckbehälters in Abhängigkeit vom Radius r.
b) Stellen Sie den funktionalen Zusammenhang $A_O = f(r)$ mit dem GTR graphisch dar. Übertragen Sie die Darstellung auf Millimeterpapier. Geben Sie auch die gewählten RANGE-Werte an, und kennzeichnen Sie den Minimumpunkt.
c) Geben Sie den minimalen Oberflächeninhalt und den zugehörigen Radius aus der graphischen Darstellung des GTR an.

a) richtig:37% falsch bzw. unvollständig: 49%
b) richtig:19% falsch bzw. unvollständig: 70%
c) richtig:12% falsch bzw. unvollständig: 32%

Teil a) wurde durch eine Skizze unterstützt, dennoch waren die in diesem Aufgabenteil aufgetretenen Schwierigkeiten zu erwarten. In Teil b) ist die relativ hohe Fehlerquote auf unvollständige Lösungen zurückzuführen, was sich dann auf den letzten Aufgabenteil auswirkte.

GTR als Wertespeicher:

Für Berechnungen von Termen unterschiedlicher Struktur, in denen immer wieder die gleichen Variablen auftreten, bietet der GTR die Möglichkeit der Speichernutzung

Beispiel 9-3

Berechnen Sie für a = 3,2; b = 0,87; c = 5,61; d = 3,2 folgende Terme.

a) $\sqrt{b \cdot c - a}$ b) $|d - c| : a$ c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}$ d) $\frac{c^2 - d^2}{c - d}$

a) richtig 90,5% falsch 9,5%
b) richtig 67,9% falsch 32,0%
c) richtig 96,4% falsch 3,6%
d) richtig 82,1% falsch 17,9%

Zu Beginn der Untersuchungen zeigten sich die Schüler zurückhaltend in der Speicherverwendung, was sich im Lauf der Zeit aber verbesserte, wie eine Abschlussklausur zeigte.

Rechenablaufprotokolle (RAP):

Beispiel 9-4

Welcher Term gehört jeweils zu nachstehendem Rechenablaufplan?

a) [$\sqrt{\ }$] [(] a [-] b [)] [÷] c [ENTER]

b) a [x] b [ENTER] [x] c [ENTER] [ENTER]

Diese Aufgabenvariante bereitete größere Probleme, 74% der Schüler erfüllten die Aufgabenstellung für den Term b). Auffallend war dass ***nur wenige ihr Ergebnis durch einsetzen einfacher Zahlenwerte überprüften***.

Probleme:

- Analyse der Termstruktur aus einem gegebenen RAP ist für viele Schüler schwer zu realisieren
- Die Spezifik des GTR und seine Möglichkeiten werden nur wenig genutzt und daher nicht in dem erforderlichen Masse beherrscht.

Aus diesem Grund entschlossen sich die Lehrer solche und ähnliche Aufgaben mehr in die täglichen Übungen einzubeziehen.

Arbeiten mit Näherungswerten:

Aufgabenstellungen mit eindeutigen Forderungen nach Rundungen auf eine bestimmte Anzahl von Stellen bereiteten keine Probleme. Blieben diese jedoch aus traten Unsicherheiten auf.

Beispiel 9-5

Gegeben sind folgende Meßwerte für drei Widerstände $R_1 = 15\ \Omega$, $R_2 = 45\ \Omega$ und $R_3 = 75\ \Omega$. Berechnen Sie den Gesamtwiderstand R für diese drei in einem Gleichstromkreis parallelgeschalteten Widerstände.

11 – Ergebnis richtig: auf Einer gerundet
22 – Ergebnis richtig: auf Zehntel gerundet
34 – Ergebnis richtig: auf Hundertstel gerundet
4 – Ergebnis richtig: gerundet aber keines von obigem
9 – Ergebnis richtig: aber nicht gerundet

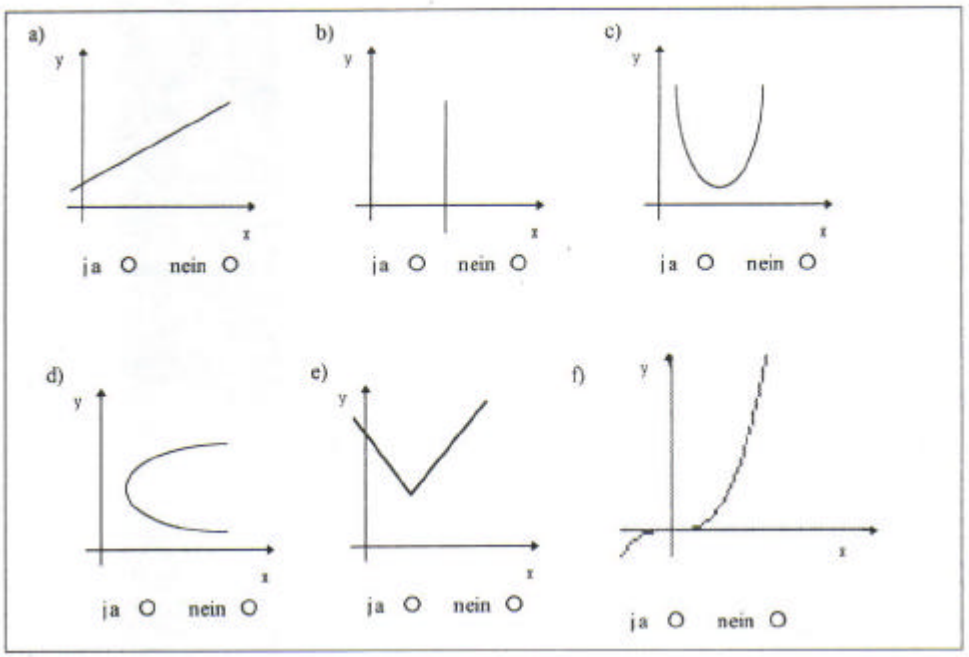
Bei der Genauigkeitsangabe der Ergebnisse war wahrscheinlich das subjektive Gefühl entscheidend. Ein Bezug zur Genauigkeit der Eingangswerte wurde offensichtlich nicht hergestellt.
Ein bewusster Umgang mit Näherungswerten war nicht vorhanden, was im gesamten Versuchsablauf zu beobachten war.

GTR als Graphikwerkzeug:

Funktionsbegriff:
Eine „Funktion“ ist eine Abbildung, die ***jedem x aus D genau ein Element y aus W zuordnet***. Man sagt die Elemente von D werden auf W abgebildet. Das einem Element x aus D zugeordnete Element y aus W bezeichnet man mit f(x). Dabei bezeichnet D den Definitionsbereich W den Wertebereich der Funktion.

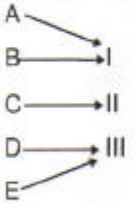
Folgerung:
Der Graph einer Funktion enthält keine Punkte, die vertikal übereinanderliegen.

Aufgaben zum Funktionsbegriff wurden 4 Versuchsgruppen (88 Schüler) sowie 3 Kontrollgruppen (Parallelklassen 62 Schüler) am Ende des 10 Schuljahres vorgelegt. Will man das Funktionsverständnis untersuchen, ist es notwendig, verschiedene Repräsentationsformen von Funktionen zu berücksichtigen.
Folgende Aufgaben wurden gestellt:



10-2

A, B, C, D und E seien fünf Arbeiter eines Betriebes; I, II, III drei Maschinen, an denen die genannten Arbeiter tätig sind. Die Abbildung läßt erkennen, daß z.B. der Arbeiter A an Maschine I arbeitet usw. Liegt hier eine Funktion vor?



nein ○ ja ○

Begründen Sie Ihre Antwort!

Es handelt sich also um ***Identifizierungsaufgaben***, wobei die jeweiligen Entscheidungen begründet werden müssen.
Folgende Begründungen sind denkbar:

A) Es ***liegt eine Funktion vor***, und es gibt zwei Begründungsmöglichkeiten, einerseits nach Definition, andererseits durch Bezug auf spezielle Funktionenklassen
B) Es ***liegt keine Funktion vor***, hier gibt es nur die Begründung nach Definition

Im folgenden sind die Ergebnisse tabellarisch aufgeführt:

Merk-	10-1.a)					c)					e)				
mal	0	1	2	3	9	0	1	2	3	9	0	1	2	3	9
h_{VG}(%)	0	86	6	7	1	0	71	19	9	1	1	56	0	9	34
h_{KG}(%)	0	47	35	16	2	0	29	60	11	0	2	41	6	6	45

Merk-	b)					d)				
mal	0	1	2	3	9	0	1	2	3	9
h_{VG}(%)	0	76	0	17	7	3	75	0	19	3
h_{KG}(%)	3	48	0	29	20	2	51	0	24	23

Legende

0 keine Entscheidung
1 richtige Entscheidung mit richtiger Begründung im Sinne von "eindeutige Zuordnung"
2 richtige Entscheidung mit richtiger Begründung mit Bezug auf spezielle Funktion
3 richtige Entscheidung (mit falscher oder ohne Begründung)
9 falsche Entscheidung

Merk-	10-1.f)				
mal	0	1	2	4	5
h_{VG}(%)	1	2	9	86	2
h_{KG}(%)	2	14	10	58	16

Legende

0 keine Entscheidung
1 "nein" mit Begründung "nicht eindeutig"
2 "ja" mit Begründung "GTR/Computergraphik"
4 "ja" ohne bzw. mit falscher Begründung
5 "nein" ohne bzw. mit falscher Begründung

Merk-	10-2			
mal	0	1	2	9
h_{VG}(%)	2	42	10	46
h_{KG}(%)	11	24	13	52

Legende

0 keine Lösung
1 richtige Entscheidung mit richtiger Begründung
2 richtige Entscheidung mit falscher bzw. ohne Begründung
9 falsche Entscheidung

Auffallend war auch, dass die Versuchsklassen überwiegend über die Definition begründeten, während in der Kontrollklasse beide Begründungen sich etwa die Waage hielten.

Ein Grund für die geringere Fixierung der Versuchsklassen auf bestimmte Funktionstypen könnte die Behandlung einer Vielfalt von Funktionenklassen und ihrer Darstellung sein.

Weiter wurde deutlich, dass Graphen Darstellungen wie sie der GTR liefert auch als Funktionen akzeptiert werden, da die Schüler wissen was der GTR „meint" und seine „Schwächen" tolerieren.

Interessant auch der Vergleich von Teil b) mit Teil f), in b) sah die Mehrzahl der Versuchsgruppe keine Funktion, in Teil f) jedoch schon.

Das doch immerhin ***etwas bessere Abschneiden der Versuchsklasse, deutet darauf hin, dass ein Begründen mittels Definition doch weitreichender ist*** als die Strategie des Wiedererkennens bestimmter Funktionsgraphen

Hier lässt sich kein negativer Einfluss des GTR auf das Verständnis des Funktionsbegriffs feststellen, vielmehr bemerkt man eine ***ausgeprägtere Begründungsfähigkeit.***

<u>Lineare Gleichungssysteme:</u>

Bei der Behandlung von linearen Gleichungssystemen mit zwei Gleichungen und zwei Variablen wurde ***mit graphischen Verfahren begonnen***. Zunächst wurden Lösungspaare ohne GTR dann mit GTR ermittelt und Aussagen über die Lösbarkeit solcher Systeme gewonnen.

In den Lösungspaaren traten fast immer ***Näherungswerte auf, deren Genauigkeit nicht oder nur kaum eingeschätzt werden konnte***. Somit ergab sich die Frage nach rechnerischen Verfahren zum Lösen solcher Gleichungssysteme, die wie üblich behandelt wurden.

<u>Lösungsmethoden mit dem GTR:</u>

- darstellen beider Funktionen und Ermitteln der Schnittpunktskoordinaten
- umformen nach f(x)-g(x)=0 und graphisches Lösen der Gleichung mit einer Variablen

Folgende Kontrollaufgaben wurden gestellt:

9-3

Ermitteln Sie alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems (auf Zehntel genau)!

$$y + \frac{1}{x} = 2$$

$$y - x^2 = 0$$

Ergebnisse zu Aufgabe 9-3:

Erfüllungsprozentsätze		Gewählter Weg	
drei richtige Lösungspaare:	... 29%	Schnittpunktverfahren:	... 13%
zwei richtige Lösungspaare:	... 7%	$x^3-2x+1=0$ graphisch lösen:	... 27%
ein richtiges Lösungspaar:	... 10%	$x^3-2x+1=0$ durch Einschachteln:	... 2%
falsch:	... 38%	Versuch, in der Gleichung $x^3-2x+1=0$ Variable durch "Umstellen" zu isolieren:	... 32%
nicht bearbeitet:	... 16%	Anwenden der Lösungsformel für quadratische Gleichungen auf $x^3-2x+1=0$:	... 7%
		nicht erkennbar :	... 19%

Bei dieser Aufgabe war auffallend, dass obwohl ausdrücklich gefordert war alle Lösungen anzugeben, ***kein Schüler den Versuch unternommen hat zu begründen, dass es keine weiteren Lösungen mehr geben kann***.
Weiter haben ca. 50% der Schüler ***offenbar Schwierigkeiten, wenn kein Lösungsweg vorgeschrieben ist***.

Oft sind die Lösungsmethoden auch abhängig von den Erwartungen des Lehrers.
In einer Klasse lösten fast alle Schüler lineare Gleichungssysteme bei nicht vorgeschriebenem Lösungsweg rein rechnerisch. In dieser Klasse hatte der Lehrer beide Verfahren behandelt, aber er hatte zum Ausdruck gebracht, dass die Schüler in jedem Fall das rechnerische Verfahren sicher beherrschen müssen. In zwei anderen Klassen bevorzugten fast alle Schüler das entwickelte Programm, und erreichten damit höhere Erfüllungsprozentsätze.

Weiter fiel auf, dass auch die ***Struktur entscheidenden Einfluss*** auf das Lösungsverhalten nimmt. Wie die Folgende Aufgabe zeigt:

9-4

Lösen Sie folgende Gleichungssysteme:

a) $x + y = 1$, $x - y = 3$

b) $\frac{1}{3}a + b = \frac{8}{5}$, $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{3}$

c) $y = -1{,}5x + 15$, $y = 0{,}25x - 8$

	a)		b)				c)			
	(1)	(2)	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(4)	(5)
Kl. 1	71%	29%	41%	59%	-	-	35%	30%	-	35%
Kl. 2	22%	78%	11%	72%	6%	11%	11%	17%	33%	39%

(1): Rechnerisch / Lösungsformel
(2): mit Programm
(3): graphisch
(4): nicht erkennbar
(5): aus Linearfaktoren Lösungen ermittelt

Man bemerkt, dass zwei Entscheidungsprinzipien vorhanden sind:
- generelle Bevorzugung eines bestimmten Verfahrens
- Verfahren in Abhängigkeit der konkreten Aufgabe

Interessant wäre auch wie verschiedene Lösungswege zur Kontrolle benutzt wurden, dies war allerdings nicht auszuwerten, da Kontrollen nicht zwangsläufig fixiert werden mussten.

Im weiteren wollte man untersuchen ***wie weit sich das Begriffsverständnis auswirkt***, am Beispiel Nullstelle einer Funktion:
Folgende Aufgabe wurde am Ende des 10.Schuljahres gestellt:

10-8

Die im folgenden gegebenen Funktionen x→y bestehen nur aus den in den Wertetabellen angegebenen Zahlenpaaren.

Haben die Funktionen Nullstellen (NST)? Wenn ja, welche?

a)

x	-1	0	1	2
y	2,5	3	4,1	5

nein O ja O

NST:_____

b)

x	-4	-2	0	2
y	0	2	0	-12

nein O ja O

NST:_____

c)

x	1	2	3	4
y	5	3	0	-1

nein O ja O

NST:_____

d)

x	1,5	1,6	1,7	1,8
y	-0,9	-0,1	-0,001	0,5

nein O ja O

NST:_____

Die Aufgabe 10-8 - eine typische Identifizierungsaufgabe - führte zu folgenden Ergebnissen:

Ergebnisse zu Aufgabe 10-8

	a)			b)				c)			d)		
	r	f	nb	r	tr	f	nb	r	f	nb	kN	N	nb
h_{VG}(%)	75	25	0	66	27	7	0	88	12	0	62	38	0
h_{KG}(%)	74	24	2	55	36	6	3	74	20	6	71	23	6

Legende:

r - richtig; f - falsch; nb - nicht bearbeitet

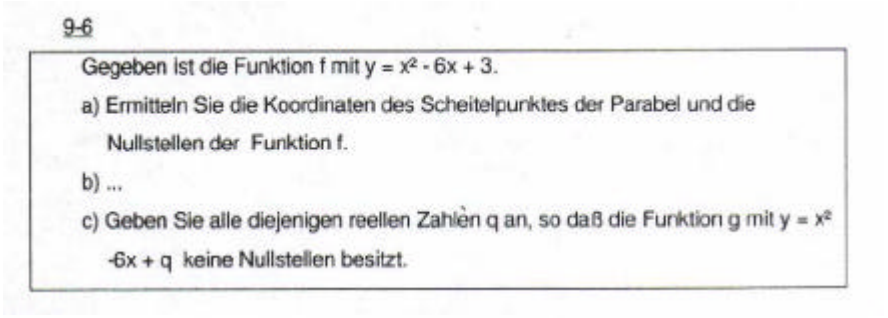
tr - teilweise richtig (nur eine Nullstelle angegeben)

kN - hat keine Nullstelle; N - hat Nullstelle

Bei Teil a) wurden keine großen Unterschiede zwischen Versuchsklassen und Kontrollklassen sichtbar, bei den Teilen b), c) war eine kleine Überlegenheit der Versuchsklassen erkennbar

Durch das graphische Lösen von Gleichungen mit dem GTR ergibt sich vielleicht ein etwas anderes (weiteres) Verständnis des Begriffs Nullstelle, weshalb die Versuchsklasse im Aufgabenteil d) schlechter abgeschnitten haben könnte.

Um zu überprüfen welche ***Auswirkungen sich auf Aufgaben ergeben könnten die nur rechnerisch sinnvoll lösbar sind*** wurde folgende Aufgabe am Ende des 9. Schuljahres gestellt:



9-6

Gegeben ist die Funktion f mit $y = x^2 - 6x + 3$.

a) Ermitteln Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes der Parabel und die Nullstellen der Funktion f.

b) ...

c) Geben Sie alle diejenigen reellen Zahlen q an, so daß die Funktion g mit $y = x^2 - 6x + q$ keine Nullstellen besitzt.

	Nullstelle mit GTR ermittelt (graphisch oder Programm)	Nullstelle mit Lösungsformel ermittelt
Aufg. c) richtig	58%	71%
Aufg. c) falsch	42%	29%

Hier erkennt man, dass eine höhere Erfolgssicherheit vorliegt, wenn die Nullstellen mit der Lösungsformel ermittelt wurden.

Ergebnisse:

- ***beim Näherungsweisen ermitteln von Lösungen tritt das Problem der Lösbarkeit stärker hervor, als beim direkten Lösen von Gleichungen.*** Im Versuchsunterricht stellte dies für die Schüler eine besondere Schwierigkeit dar. Hier müsste das methodische Vorgehen genauer bestimmt werden.
- ***Das Bevorzugen von algorithmischen Verfahren scheint in einigen Fällen die Erfolgssicherheit bei Lösbarkeitsbetrachtungen zu beeinflussen***. Auch dies sollte man genauer untersuchen. Daraus würde sich bestätigen, dass es sich nicht um ein ersetzen der algorithmischen Verfahren handeln kann.
- ***Einbeziehen von Näherungsverfahren erweitert das Stoffvolumen***, so dass man überlegen muss wo man auf algorithmische Verfahren verzichten kann, und welche Auswirkungen dies langfristig haben könnte. Dies sollte auch genauer untersucht werden.
- ***Die Ergebnisse sprechen nicht gegen einen frühen Zeitpunkt um die Schüler mit näherungsweisem Lösen von Gleichungen vertraut zu machen.*** Und nicht nur auf direkte Lösungsverfahren einzugehen.
- Durch einbeziehen graphischer Lösungsverfahren können ***Möglichkeiten und Grenzen rechnerischer (direkter) Verfahren besser erkannt werden***. Die Sicht auf Funktionen wird erweitert, bei Anwendungen ist es möglich , ***den engen Rahmen einiger weniger Funktionenklassen bzw. Gleichungstypen zu überschreiten***.

- Die Sorge ***bedeutsame Ziele eventuell zu vernachlässigen wurden in dieser Untersuchung nicht bestätigt***. Dies konnte vermutlich durch die direkte Verzahnung von direkten und näherungsweisen Verfahren verhindert werden.

VI. Ergebnis:

Zunächst ist herauszustellen, dass der GTR nur neben vielen anderen und bewährten Unterrichtsmitteln ***im MU Anwendung finden könnte.***
Der Rechner kann nicht als Allheilmittel betrachtet werden, sondern er unterstützt vielmehr die Erfüllung der Zielstellung des MU.

Im Vergleich zu den herkömmlichen Taschenrechnern können folgende Vorteile hervorgehoben werden:

- Alle Eingaben sind auf dem großen Display sichtbar**, *Terme erscheinen in ihrer gesamten Struktur*** und sind übersichtlich angeordnet; mehrere Ergebnisse können gut miteinander verglichen werden.
- ***Terme können bei fehlerhafter Eingabe leicht korrigiert werden***. Die Fehleranzeige vom Rechner wurde als positiv bewertet
- Übersichtliche Tastatur. Das „***wieder Aufrufen vorheriger Terme***“ bzw. die Nutzung des letzten Ergebnisses erleichtern umfangreiche Berechnungen.
- ***Bei Funktionsgraphen wurden Vorteile der Veranschaulichung*** hervorgehoben
  + Erkennen des Verhaltens
  + Ablesen von Eigenschaften
  + Ablesen von Wertepaaren (als Näherungswerte)
  + Experimentieren beim zeichnen von Graphen
  + mit Hilfe des Graphen ist einen Kontrolle num. Ergebnisse mögl.
- ***zahlreiche Kontrollmöglichkeiten*** beim Lösen von Aufgaben
- ***Entwicklung einer kritischen Einstellung und Haltung zum GTR-Einsatz durch Aufzeigen seiner Grenzen***
- ***Effektives Arbeiten*** (reduzieren der Nebenrechnungen) und z.T. sichereres Arbeiten (z.B. Termwertberechnungen)
- Bessere Schulung des ***mathematischen Verständnisses*** von Begriffen
- Nutzung eines ***Methodenarsenals*** zum Lösen von Aufgaben
- Zusätzliche ***Motivationsmöglichkeiten für mathematische Inhalte***
- Möglichkeiten ***vertiefender Betrachtungen*** für besonders interessierte Schüler.

Als Nachteil und schwierig empfanden einige Schüler die ***Mehrfachbelegung der Tasten***. Für sie war zu viel versteckt. Der Umgang mit dieser Art „Menütechnik“ war relativ neu für sie, bereitete aber andererseits auf ähnliche Arbeitsweisen mit Benutzeroberflächen auf einem PC vor.
Die ***Einführungszeit von 5 Stunden wurde dennoch von den meisten Schülern als ausreichend eingeschätzt***. Ein selbständige Erschließung der Funktionsweise war auch Teil des Gesamtkonzepts.

Die Möglichkeit der ***Projektion des gesamten Rechners mit Display erwies sich als sehr hilfreich***, allerdings war nach einer längeren Betriebsdauer des Projektors nicht mehr viel zu erkennen, da der Kontrast immer schwächer wurde. Dieses Gerät wurde später durch ein View Screen ersetzt, wodurch allerdings nur noch das Display des Rechners abgebildet wurde. Es konnten dann Wandkarten mit einer Abbildung des TI-81 zu Hilfe genommen werde, um Tastenkombinationen klar zu machen.

Es wurde der Wunsch ausgedrückt, bei umfangreichen Materialien eine Schwerpunktsetzung vorzunehmen, bzw. mehr Anwendungsaufgaben einzubinden. Insgesamt stellten die Materialien jedoch eine gut Bereicherung der üblichen Unterrichtsmaterialien dar.

Obwohl 75% der beteiligten Schüler einen PC zu Hause besitzen, maßen die meisten dem GTR einen beachtlichen Stellenwert bei. Sie schätzten ihn vor allem auch als schnell verfügbares (keine Bootzeiten), handliches und komfortables Unterrichtsmittel.

Weiter war festzustellen, dass im Verlaufe der Untersuchung Unterschiede in der Handhabung des GTR zwischen einzelnen Schülern immer größer wurden.

Im Verlaufe der Untersuchung hat sich die Frage gestellt, inwieweit die Schüler auch mit programmiertechnischen Fragen vertraut zu machen sind (z.B. beim lösen linearer Gleichungssysteme)

VII. Ausblick:

Einige der genannten Mängel des TI-81 konnten bei der Erweiterung des Versuchs auf den TI-85 abgestellt werden. Die Schüler die mit diesem GTR arbeiteten hoben dies als sehr positiv hervor.
Damit ergibt sich die Frage ob der Einsatz von noch leistungsfähigeren Taschenrechnern bessere Ergebnisse liefern würde.

Alle von den Schülern geäußerten Wünsche, die den GTR noch mehr in Richtung „Computer“ rücken, sind im TI-92 realisiert (PC-Schnittstelle, 3-D-Darstellung, symbol-verarbeitend, ...)

Preis: 358,00 DM
http://abyte.de/ti89ti92.htm
Preis: 605,52 DM
http://www.software-spatz.de/
Preise gelten für Nachfolgermodell TI-92+

Auch dieser Rechner wurde schon im Rahmen eines Schulversuches am Hilda-Gymnasium Pforzheim eingesetzt.

I. Verlauf:

1996/1997
Alle Schüler des Leistungskurses Mathematik erhielten in Klasse12, einen TI-92 gegen eine „pädagogische Miete“ von 30DM

1999
Der TI-92 durfte erstmals auch im Abitur eingesetzt werden. Die Schüler konnten am Anfang des Schulhalbjahres 13.2 zwischen Zentralabitur und TI Abitur wählen. Es entschieden sich alle für das TI Abitur.

1999/2000
Alle Schüler ab der 12 Klasse arbeiten mit dem TI-92
Vier weitere Schulen in Nordbaden beteiligen sich an diesem Schulversuch

2000/2001
Das Verfahren wird beibehalten

2004
Für das Abitur 2004 ist ein neuer CAS-Lehrplan geplant, und das gleiche Verfahren für alle Mathematikkurse, die mit einem CAS arbeiten.

Am Hilda-Gymnasium wurde von der Fachkonferenz und dem Elternbeirat der Wunsch geäußert den TI-92 schon ab Klassenstufe 10 einzusetzen.
Probleme ergaben sich bei der Finanzierung und der noch zu wenig geeigneten Unterrichtsmaterialien.

II. Ziele:

- Klassischer Unterricht teils von Hand teils CAS unterstützt
- Entdeckender experimenteller Zugang falls möglich
- Betonung des funktionalen Aspekts
- Lernen von Methodenkompetenz
- Lösen von Aufgaben aus anderen Fächern und aus der Erfahrungswelt der Schüler

III. Erfahrungen:

Die durch den Einsatz gewonnene Zeit wurde für ausführliche Visualisierung von Kurvenscharen und mathematischer Ideen (Intervallhalbierung, Newton-Verfahren, Streifenmethode als Einstieg in die Integralrechnung, ...) genutzt. Weiter konnten Wahlthemen erarbeitet werden (Komplexe Zahlen, Vektorprodukt, ...).
Im Rahmen des Schulversuchs konnte eine Klausur durch ein Referat ersetzt werden. Die Schüler der Klasse 12 wählten meist große Mathematiker als Thema, in Klasse 13 wurden meist Themengebiete der Schulmathematik gewählt, was sich als gute Vorbereitung für das mündliche Abitur herausstellte.

Der Bericht über einzelne erarbeitete Stoffgebiete vermittelt die Freude der Schüler am experimentellen Erforschen mit dem TI-92.
Hier wurde auch großer Wert auf die Dokumentation im Heft, die Interpretation der Ergebnisse sowie die Begründung des Ansatzes und des Rechenweges gelegt.

Die Inhalte des Lehrplans wurden immer zuerst an einfachen Beispielen von Hand gerechnet, die Standardverfahren müssen auch ohne CAS von den Schülern durchgeführt werden können.

Klausuraufgaben waren mehrheitlich im Stile der Abituraufgaben.
Das Interesse am Programmieren mit dem CAS war nicht sehr ausgeprägt, dennoch wollten die Schüler die Grundprinzipien kennenlernen. So hat ein Schüler ein Programm zur Kurvendiskussion geschrieben und vorgeführt.
Derartige Programme sind auch unter der folgenden Adresse im Internet zu finden:
http://www1.inetservice.de/t-koenig/ti.html

Auch hier wurde die ***Handlichkeit*** als angenehm empfunden. ***Kein lästiges booten***, die Bedienung entspricht dem gängigen Windows-Standard. Ausserdem kann der ***Chipsatz per Internet aktualisiert*** werden, und es können Geräte zur ***Messwerterfassung*** angeschlossen werden, gerade für den naturwissenschaftlichen Bereich von Interesse.
Der ***Unterricht wird vom rein mechanischen Rechnen entlastet***, und so bleibt mehr Zeit für grundlegende Fragestellungen, Visualisierungen, und Anwendungen.
Ein Kabel ermöglicht den ***schnellen Datenaustausch mit dem PC sowie auch mit den Rechnern untereinander***. Auch hier ist wieder ***die Möglichkeit der Projektion des Displays*** vorteilhaft. Dadurch dass die Schüler mit diesem Hilfsmittel selbständig ihre Aufgaben präsentieren, entsteht eine Mischung aus Frontalunterricht und Teamarbeit.

TI bietet eine Vielzahl von Pädagogen erstellter Materialien und in Zusammenarbeit mit der Uni Münster auch Lehrerfortbildungen an. Die Materialien werden ständig weiterentwickelt.

Insgesamt sind die ***Erfahrungen sehr positiv bewertet worden***. Die Schüler sind hochmotiviert und sehen den TI-92 als ausgezeichnete Unterstützung.
Es entwickelt sich ein anregender Unterricht, der von Routinerechnungen entlastet wird, die dadurch ersparte Zeit steht für die Betrachtung der Grundideen der Mathematik zur Verfügung.

Der Einsatz in Klasse 10 scheiterte an der Finanzierung und an den fehlenden Unterrichtsmaterialien, wodurch dies momentan eine zu große Belastung der Lehrer zur Folge hätte. An der Realisierung wird allerdings momentan gearbeitet.

Stimme einer Schülerin:
Dieser programmierbare CAS-Rechner ist nicht die Basis. Sondern einen hilfreiche Erweiterung des Mathematikunterrichts. Am Anfang aus Unwissenheit als eine Art Game-Boy missbraucht, wurde er nach einer kurzen Einarbeitungsphase vollständig in den Analysisunterricht integriert. Wir lernten Gleichungen lösen, differenzieren, integrieren usw. Als zusätzlichen Vorteil können Funktionen mit Parametern schnell und sogar im Vergleich graphisch dargestellt und untersucht werden. Aber auch z.B. bei der Vektorrechnung weist der Rechner, von uns liebevoll TI genannt, eine breite Palette von Befehlen und Möglichkeiten auf. Täglich entdecken wir neue Methoden der Aufgabenlösung und werden die volle Bedeutung und die Tragweite des TI-92 wahrscheinlich erst später schätzen lernen. Doch ist uns heute schon die immense Erleichterung im Unterricht der Mathematik und Naturwissenschaften bewusst und wir werden uns dafür einsetzen, dass auch die uns folgenden Schülergenerationen vom TI-92 profitieren können. Beim TI-92 gilt ähnlich wie auch bei anderen Werkzeugen: „Es geht natürlich auch ohne, doch mit seiner Hilfe ist es um Einiges leichter und besser!“

IV. Fazit:

- Die bisherigen Ergebnisse zeigen, dass man ***mit dem TI-92 auf dem richtigen Weg zu einer neuen Aufgabenkultur ist***.
- Der TI-92 ***Einsatz ist in großem Umfang möglich und eröffnet eine große methodische und pädagogische Freiheit***. Er bietet viele Möglichkeiten der Begriffsbildung.
- ***Durch den Zeitgewinn können die Aufgaben vollkommen ergründet werden.***

Eine Änderung des Lehrplans ist nicht nötig, vielmehr kann der zu behandelnde Stoff tiefer ergründet werden.
Auch das Zentralabitur muss nicht hinterfragt werden, da mit dieser modernen Technologie gleiche Voraussetzungen für alle Schüler vorhanden sind.